Θεωρία Αυτομάτων
και Τυπικών γλωσσών

1/11/2016

Στο παρακάτω θεώρημα θα αναφέραμε τις ιδιότητες που είναι αποδεκτές από πεπερασμένα αυτόματα (Π.Α) και επομένως είναι γλώσσες τύπου III ή κανονικές γλώσσες.

Θεώρημα: Οι γλώσσες τύπου III είναι κλειστές ως προς τις πράξεις (1) της ένωσης $L_1 \cup L_2$, (2) της σύνδεσης L_1, L_2, (3) της κλείσης L^*, (4) της συμπλήρωσης L, (5) της τομής $L_1 \cap L_2$

Κανονικά σύνολα (= κανονικές γλώσσες, προκύπτουν από γραμματική τύπου III)

Λέγονται τα σύνολα που είναι αποδεκτά από Π.Α. Ενδιαφέρον είναι ο τρόπος ορισμού τους γιατί οδηγεί αυτόματα στις ιδιότητες που διατυπώσαμε με το προηγούμενο θεώρημα και στις λεγόμενες κανονικές εκφράσεις με τις οποίες δίνεται μια μαθηματική παράσταση των συνόλων αυτών επομένως και των γλωσσών.

Ορισμός: Έστω ένα πεπερασμένο αλφάβητο Σ. Ορίζουμε αναδρομικά ένα κανονικό σύνολο ως προς το Σ ως εξής:

1. Το $\emptyset$ είναι κανονικό σύνολο ως προς Σ
2. Το μονοσύνολο $\{\varepsilon\}$ είναι κανονικό ως προς Σ
3. $\forall a \in \Sigma$ το $\{a\}$ ——//——.

Α. Αν τα Α και Β είναι κανονικά ως προς το Σ, τότε:

(α) $A \cup B$ είναι κανονικό σύνολο (Κ.Σ) ως προς Σ.

(β) $A.B$ ——//——

(γ) A^* ——//——

(δ) τίποτε άλλο δεν αποτελεί Κ.Σ.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, τα κανονικά σύνολα παριστάνονται πολύ αποτελεσματικά με τις κανονικές εκφράσεις, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

Ορισμός:

Οι κανονικές εκφράσεις (Κ.Ε) και τα κανονικά σύνολα (Κ.Σ) τα οποία παριστάν, ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

① $\emptyset$ είναι η κανονική έκφραση που παριστά το κανονικό σύνολο $\emptyset$

② ε —||— —||— —||— $\{\varepsilon\}$

③ a —||— —||— —||— $\{a\}$

όπου $a \in \Sigma$

④ Εάν u, v είναι Κ.Ε που παριστάν τα Κ.Σ U, V τότε:

(α) $(u+v)$ είναι Κ.Ε. που παριστά το Κ.Σ $U \cup V$

(β) $(u \cdot v)$ —||— —||— —||— UV (ή $U \cdot V$)

(γ) (u^*) —||— —||— —||— U^*

⑤ Τίποτε άλλο δεν αποτελεί Κ.Ε.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συντομογραφία u^+ για να αναπαριστάσουμε την Κ.Ε $u.u^*$

$u^+ = (u \cdot u^*) \longrightarrow$ δεν περιέχει το ε

Το u^* περιέχει το ε ενώ u^+ είναι το u^+ αλλά δεν περιέχει το ε.

Άσκηση (να τη φέρουμε:)

Δύο Κ.Ε. είναι ίσες αν παριστάν το ίδιο Κ.Σ

Να δειχθεί ότι η Κ.Ε $(abb)^+ + (abba)^+)$ και $abb(abb)^* + (abb)^*a)$ είναι ίσες γιατί παριστάν το σύνολο

$\{abb, abba, abbabb, abbabba, \ldots\}$

Σε περίπτωση που δεν είναι ίσες να τις συμπληρώσετε ώστε να είναι.

Με το παρακάτω λήμμα διατυπώνονται οι θεμελιώδεις ιδιότητες των κανονικών εκφράσεων με τις οποίες μπορούν να αποδεχτούν διάφορες ταυτότητες. Οι αποδείξεις των αλγεβρικών ιδιοτήτων μπορούν να γίνουν δείχνοντας ότι 2.Κ.Ε. που δηλώνονται ίσες παριστάνουν το ίδιο Κ.Σ.

Λήμμα:

Εάν a, β, γ είναι κ.ε. τότε

1. $a+\beta = \beta+a$
2. $\emptyset^* = \varepsilon$
3. $a+(\beta+\gamma) = (a+\beta)+\gamma$
4. $a(\beta\gamma) = (a\beta)\gamma$
5. $a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma$
6. $(a+\beta)\gamma = a\gamma + \beta\gamma$
7. $a\varepsilon = \varepsilon a = a$
8. $a\emptyset = \emptyset a = \emptyset$
9. $a^* = a + a^*$
10. $(a^*)^* = a^*$
11. $a+a = a$
12. $a+\emptyset = a$

Λήμμα

Τα σύνολα $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ και $\{a\}$ είναι γλώσσες τύπου III.

Θεώρημα: μια γλώσσα είναι κανονικό σύνολο εάν και μόνο εάν είναι γλώσσα τύπου III.

Κανονικά Σύνολα και Πεπερασμένα Αυτόματα

Η διαπίστωση και διατύπωση των παρακάτω ιδιοτήτων, βοηθάει στη συσχέτιση Κ.Σ και Π.Α.

Λήμμα

Δίνεται ένα πεπερασμένο αλφάβητο Σ. Τα σύνολα $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{a\}$ $\forall a \in \Sigma$ είναι αποδεκτά από κάποιο πεπερασμένο αυτόματο (Π.Α)

Λήμμα

Εάν η $\Gamma_1 = M_1$ και $\Gamma_2 = M_2$ είναι γλώσσες αποδεκτές από τα M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε τα σύνολα (γλώσσες) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ και Γ_1^* είναι αποδεκτά από Π.Α.

Θεώρημα

Ένα σύνολο (γλώσσα) είναι αποδεκτό από Π.Α εάν και μόνο εάν είναι κανονικό σύνολο (Κ.Σ)

Με βάση τα παραπάνω είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένα Π.Α. για κάθε Κ.Ε. που παριστά κάποιο Κ.Σ. Σημειώνουμε ότι το Π.Α που προκύπτει από μια τέτοια κατασκευή δεν είναι βέλτιστο γιατί υπάρχουν πολλές κανονικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε ένα κανονικό σύνολο

Πριν προχωρήσουμε στη ~~κατασκευή~~ διατύπωση των κανόνων κατασκευής του Π.Α που αντιστοιχεί σε μια κανονική έκφραση, θα κάνουμε μια επέκταση του ορισμού της συνάρτησης μετάβασης ενός ΜΑΠΑ

Έστω το ΜΑΠΑ K ~~[illegible]~~ $M = (K, \Sigma, \mu, k_0, T)$

Η συνάρτηση μ ορίζεται ως

$\mu : K \times \{\varepsilon\} \cup \Sigma \rightarrow 2^K$ και

$\mu(k, \alpha) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ όπου $k, p_i \in K$, $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \Sigma$

Είναι δυνατό να θεωρηθεί ότι για κάθε κατάσταση υπάρχει η ε μετάβαση από την ______ στον εαυτό της στην περίπτωση που δεν υπάρχουν ε-μεταβάσεις από την κατάσταση αυτή σε άλλη κατάσταση

(π.χ. $\mu(k, \varepsilon) = \{k\}$)

Για κάθε κατάσταση k υπάρχει ένα σύνολο που αποτελείται από όλες τις καταστάσεις που είναι προσιτές με το k με ε μεταβάσεις. Μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο αυτό είναι κλειστό ως προς τις μεταβάσεις με σύμβολο το ε και για αυτό το ονομάζουμε ε-κλείση της κατάστασης α

Για να βρούμε την ε* μιας κατάστασης α ορίζουμε μια συνάρτηση $2^{K^{2^K}}$ ως εξής:

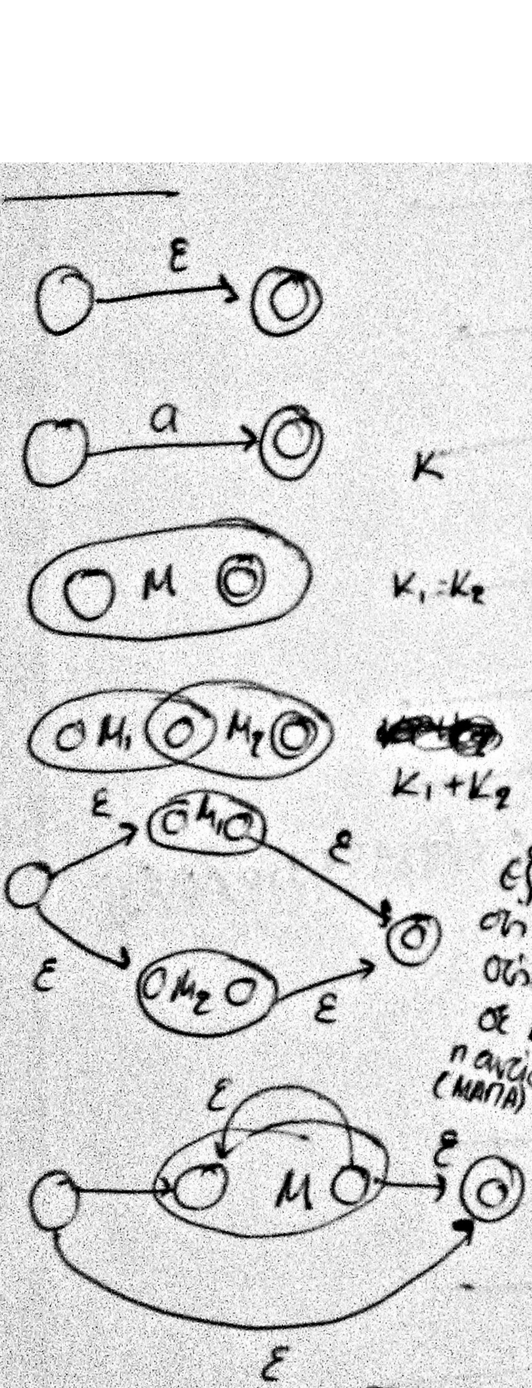
ε κλείση $(\{k, \xi\}) = \{k\}$ για μ(

έκλειση $(\{k_1\}) = \{k_1\}$ για $\mu(k,\varepsilon) = \{k_1\}$; ; ;

έκλειση $(\{k_1\} = \{k_1\} \cup \{$ε κλειση $(\mu(k,\varepsilon), \mu(k,t) = \{m\}$

έκλειση $\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{m_i\}\right) = \bigcup_{i=1}^{m}$ εκλειση $(\{k_i\})$

Όταν κατασκευάζεται το ΜΠΑ που επιτρέπει ε μεταβάσεις, αντί για τη συνάρτηση μ, χρησιμοποιούμε την επέκταση $\bar{\mu}(k,a) = \bigcup_{p \in \mu(k,a)}$ ε κλειση$(\{p\})$



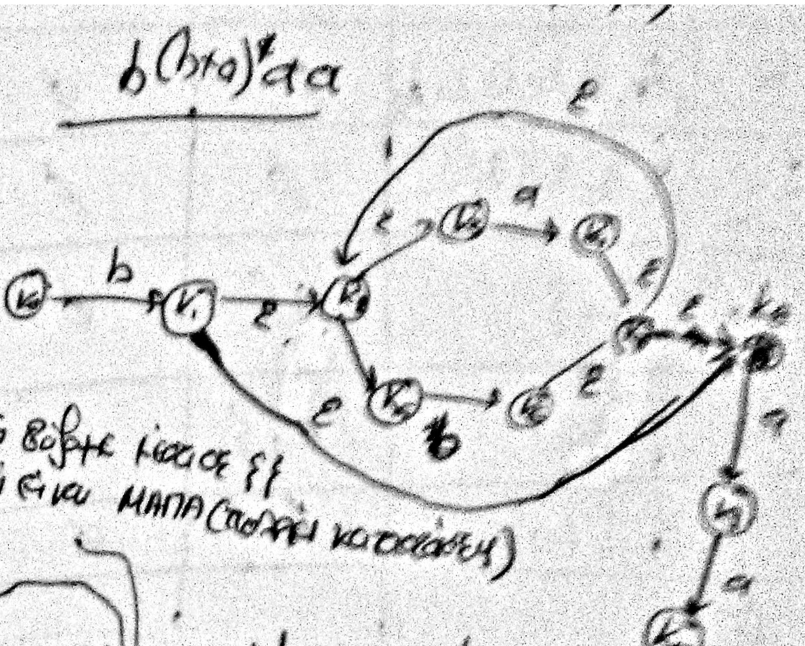
K

$K_1 \cdot K_2$

$K_1 + K_2$

K^*

$b(b+a)^*aa$



Το βάζαμε μέσα σε {} γιατί είναι ΜΑΠΑ (πολλαπλή κατάσταση)

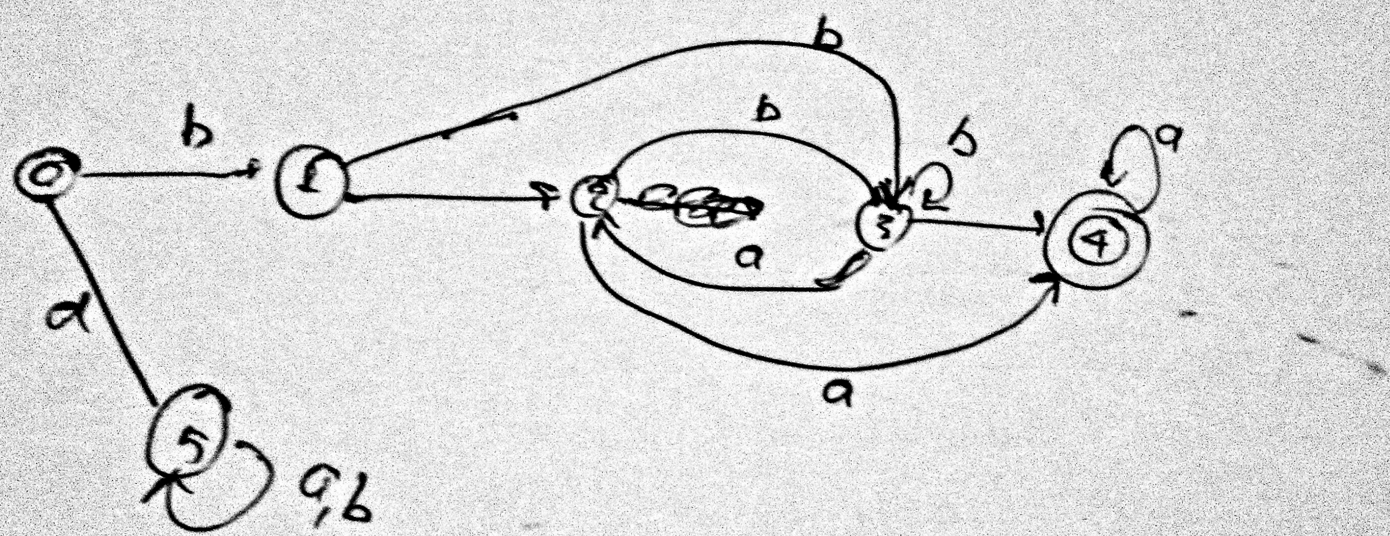
εξ ορίζεται στη πρώτη στήλη μπαίνει σε κάθε γραμμή η αντίστοιχη K_i (ΜΑΠΑ)

K	$\mu(K,\varepsilon)$	$\mu(K,a)$	$\mu(K,b)$
K_0	$\{K_0\}$	$\emptyset$	$\{K_1\}$
K_1	$\{K_1, K_2, K_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
K_2	$\{K_2, K_3, K_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
K_3	$\{K_3\}$	$\{K_4\}$	$\emptyset$
K_4	$\{K_4, K_7\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
K_5	$\{K_5\}$	$\emptyset$	$\{K_6\}$
K_6	$\{K_6, K_7\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
K_7	$\{K_2, K_7, K_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
K_8	$\{K_8$, [illegible]$\}$	$\{K_9\}$	$\emptyset$
K_9	$\{K_9\}$	$\{K_{10}\}$	$\emptyset$
K_{10}	$\{K_{10}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

k	$F(k,\varepsilon)$	$F(k,a)$	$F(k,b)$
k_0	$\{k_0\}$	$\emptyset$	$\{k_1, k_2, k_3, k_5, k_8\}$
k_1	$\{k_1, k_2, k_3, k_5, k_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
k_2	$\{k_2, k_3, k_5\}$	$\{k_2, k_3, k_4, k_5, k_7, k_8\}$	$\emptyset$
k_3	$\{k_3\}$	$\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$	$\emptyset$
k_4	$\{k_2, k_3, k_4, k_5, k_7, k_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
k_5	$\{k_5\}$	$\emptyset$	$\{k_2, k_3, k_5, k_6, k_7, k_8\}$
k_6	$\{k_2, k_3, k_5, k_6, k_7, k_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
k_7	$\{2, 3, 5, 7, 8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
k_8	$\{k_8\}$	$\{k_9\}$	$\emptyset$
k_9	$\{k_9\}$	$\{k_{10}\}$	$\emptyset$
k_{10}	$\{k_{10}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\emptyset \cup \emptyset \cup \{2,3,4,5,7,8\} \cup \emptyset \cup \{9\}$

	K'	$h'(k', a)$	$h'(k', b)$
0	[0]	—	[1, 2, 3, 5, 8]
1	[1, 2, 3, 5, 8]	[2, 3, 4, 5, 7, 8, 9]	[2, 3, 5, 6, 7, 8]
2	[2, 3, 4, 5, 7, 8, 9]	(2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10)	(2, 3, 5, 6, 7, 8)
3	2, 3, 5, 6, 7, 8	(2, 3, 4, 5, 7, 8, 9)	(2, 3, 5, 6, 7, 8)
4	[2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10]	(2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10)	[2, 3, 5, 6, 7, 8]


0
b
1
2
b
b
b
3
a
a
4
a
a
5
a,b